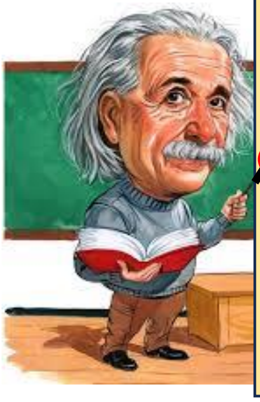
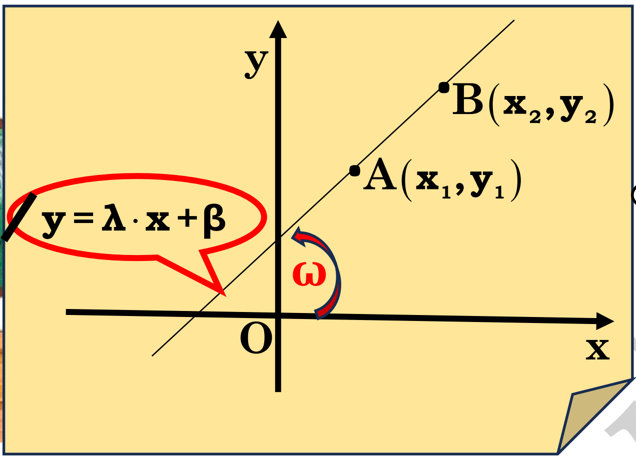
# *Τυπολόγιο-μέθοδοι στην ευθεία*

## Συντελεστής διεύθυνσης λ






λ=εφω

«γωνία με τον χ΄χ»

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ με } x_1 \neq x_2$$

Γνωρίζω δύο σημεία της ευθείας με διαφορετικές τετμημένες

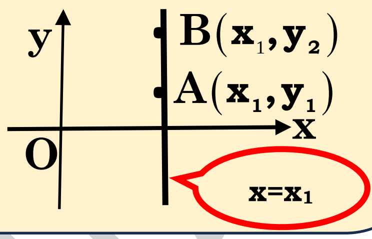
Από την εξίσωση

$$y = \lambda \cdot x + \beta$$

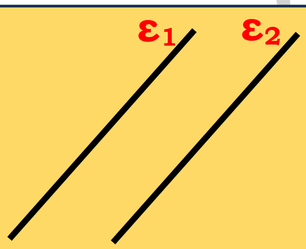
Ο συντελεστής διεύθυνσης ( ή κλίση) της ευθείας

Αν οι τετμημένες είναι ίσες…

Δεν ορίζεται το λ και είναι:

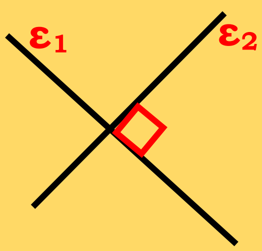



*Δύο χρήσιμες σχέσεις…*




**Παράλληλες ευθείες τότε ίσα λ, δηλαδή**

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$




**Κάθετες ευθείες τότε αντιθετοαντίστροφα λ, δηλαδή**

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

## *Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας*

$Ax + By + \Gamma = 0$, με $\underbrace{A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0}_{\text{προσοχή}}$

Αν $B \neq 0$ , τότε:

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{A}$, δηλαδή η ευθεία παίρνει τη μορφή $y = \lambda \cdot x + \beta$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της είναι $\lambda = -\frac{A}{B}$

Αν $B=0$ , τότε $A \neq 0$ , οπότε

$$x = -\frac{\Gamma}{A}$$

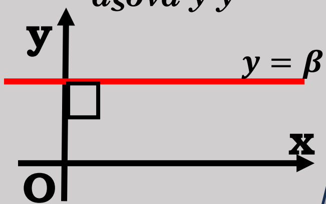
και η εξίσωση έχει τη μορφή $x = x_0$ η οποία είναι κάθετη στον άξονα x'x

**λ=0**

**λ≠0**

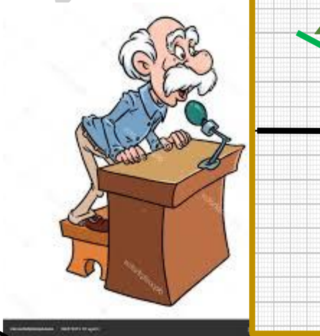
$$y = \lambda \cdot x + \beta$$

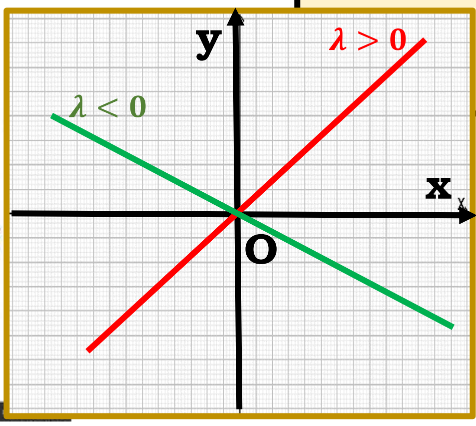
***y = β, ευθεία κάθετη στον άξονα y'y***

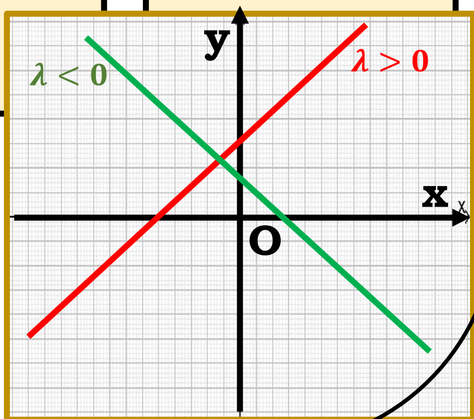



**Αν β≠ 0 , τότε**
**$y = \lambda \cdot x$**
**ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων**

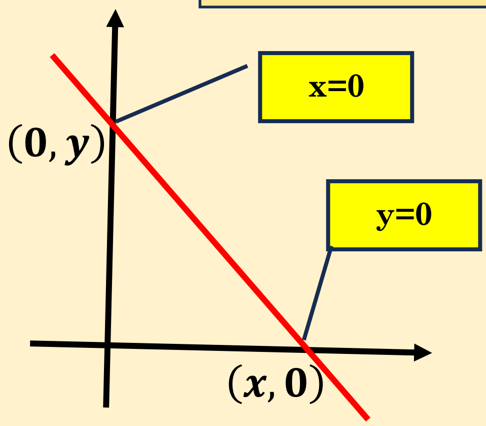
**Αν $\beta = 0$, τότε**
**$y = \lambda \cdot x + \beta$**
**Ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων**





## Σημεία τομής με τους άξονες

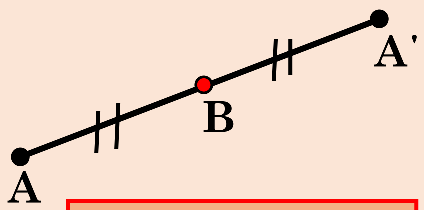



Για το σημείο τομής με τον χ'χ θέτουμε στην ευθεία όπου χ=0

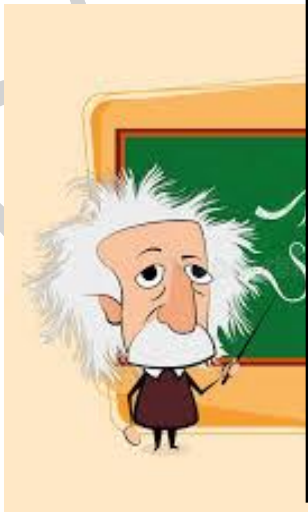
Για το σημείο τομής με τον ψ'ψ θέτουμε στην ευθεία όπου y=0

## Δύο χρήσιμες συμμετρίες σημείου Α ως προς...

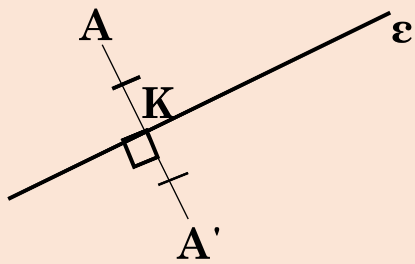
### ως προς σημείο Β




Το Β είναι μέσο του ΑΑ', οπότε δουλεύουμε με συντεταγμένες του μέσου.



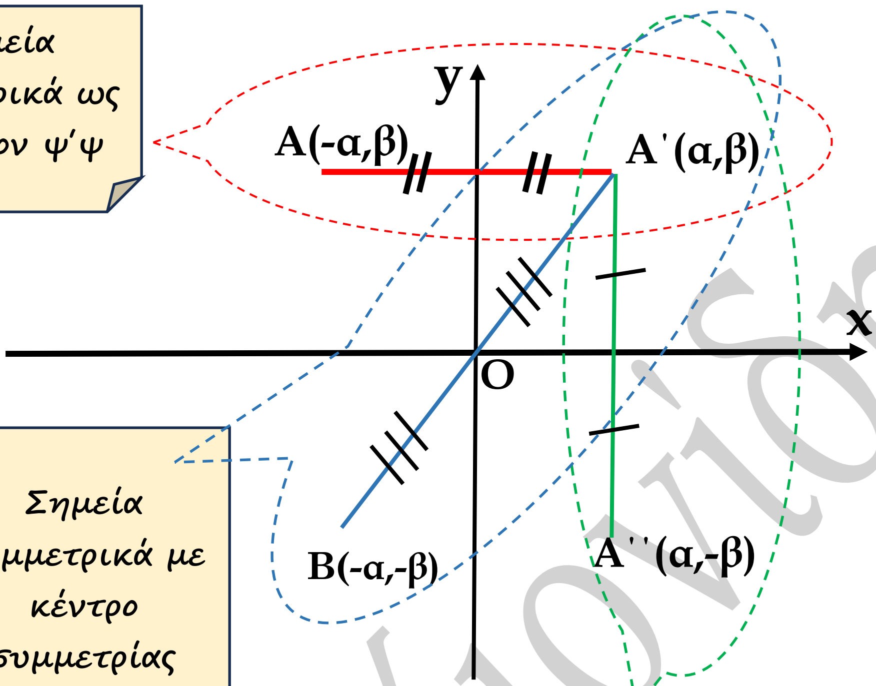
### ως προς ευθεία ε




Βρίσκουμε την εξίσωση της ΑΑ' και έπειτα το σημείο Κ και δουλεύουμε με το μέσο Κ της ΑΑ'

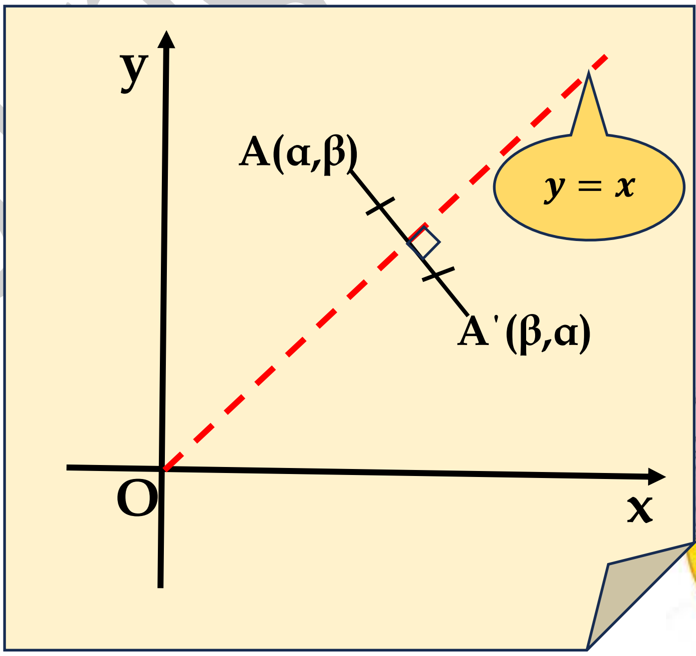
## *Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων…*

Σημεία συμμετρικά ως προς τον ψ΄ψ




Σημεία συμμετρικά με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων

Σημεία συμμετρικά ως προς τον χ΄χ




Σημεία συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο y=x

## *Παραμετρική*
## *Ax+By+Γ=0*

- Είναι ευθεία για τις τιμές της παραμέτρου που ΔΕΝ μηδενίζουν συγχρόνως τα Α και Β.
- Ευθεία//χ΄χ $\Leftrightarrow A = 0$
- Ευθεία//ψ΄ψ$\Leftrightarrow B = 0$
- Η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων$\Leftrightarrow \Gamma$=0

*Για να δείξουμε ότι η παραμετρική είναι οικογένεια ευθειών που διέρχονται από το ίδιο σημείο…*

- Δίνουμε στην παράμετρο δύο (επιτρεπτές) τιμές ,παίρνοντας έτσι δύο ευθείες της οικογένειας.
- Λύνουμε το σύστημα των δύο ευθειών.
- Επαληθεύουμε το σημείο που βρήκαμε (κέντρο της δέσμης) στην παραμετρική.


## *Μεταβλητά-κινούμενα σημεία*

**Είναι τα σημεία με παραμετρικές συντεταγμένες π.χ Μ (2λ+1,4λ+8) , λ$\epsilon IR$. Το παραπάνω ζεύγος παριστάνει πολλά σημεία και γι΄ αυτό το Μ το λέμε μεταβλητό.**

*Πως βρίσκουμε τη γραμμή πάνω στην οποία κινούνται*

## Τι κάνουμε

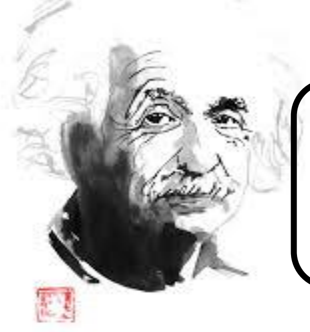
$M(\varphi(\lambda), \pi(\lambda))$

Θέτουμε **x** **y**

Στο παράδειγμα μας

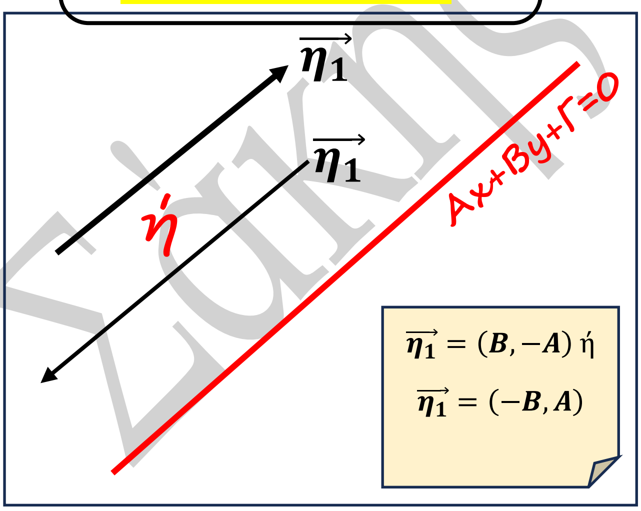
$$2\lambda + 1 = x$$
$$4\lambda + 8 = y$$

...και απαλείφουμε το λ, είτε με αντικατάσταση είτε με αντίθετους συντελεστές....για να βρούμε σχέση μόνο με τα x και y (που θα είναι η εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία θα κινούνται τα σημεία).

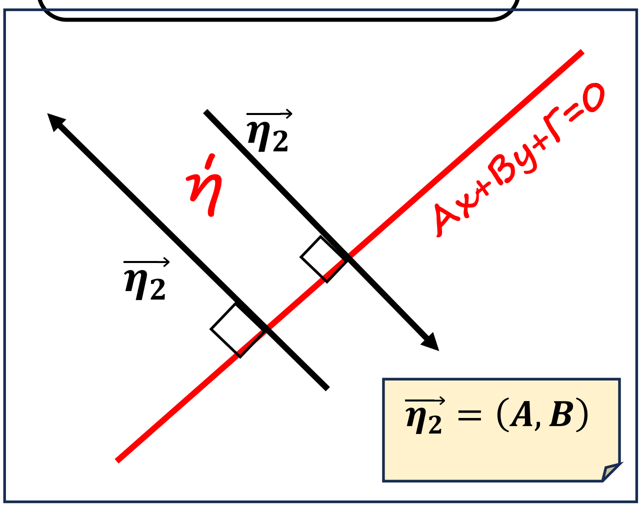


$$\begin{cases} (-2)\cdot 2\lambda + 1 = x \\ 4\lambda + 8 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\lambda - 2 = -2x \\ 4\lambda + 8 = y \end{cases} \Leftrightarrow ...y = 2x + 6$$

### Διάνυσμα παράλληλο στην Αx+Βy+Γ=0



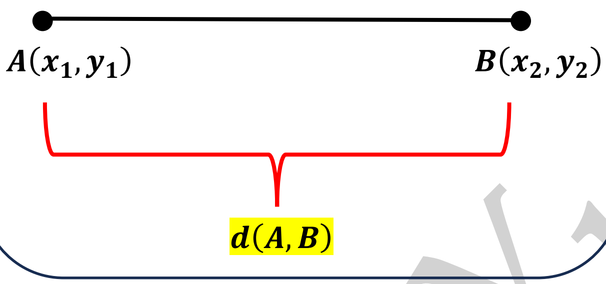

### Διάνυσμα κάθετο στην Αx+Βy+Γ=0




## Απόσταση σημείου από σημείο

Αν $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο σημεία.
τότε η μεταξύ τους απόσταση είναι:

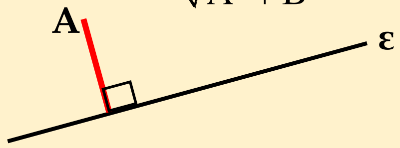
$$\boldsymbol{d(A,B)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$$




## Απόσταση σημείου από ευθεία

Αν $A(x_o,y_o)$ είναι ένα σημείο και $Ax+By+\Gamma=0$ η εξίσωση μιας ευθείας (ε) , τότε η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία (ε) είναι:

$$d(A,\varepsilon)=\frac{|\mathrm{A}x_o+By_o+\Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$$

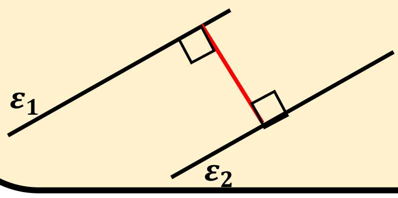


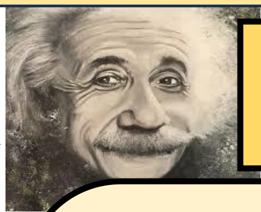

## Απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών

*Αν μπορώ να θυμάμαι τύπο…*

**Η απόσταση των παραλλήλων ευθειών $\boldsymbol{\varepsilon_1: y=\lambda x+\beta_1}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_2: y=\lambda x+\beta_2}$ είναι:**

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\frac{|\beta_1-\beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$



*Αν ΔΕΝ μπορώ να θυμάμαι τύπο…*

- **Βρίσκω τυχαίο σημείο Α της μιας ευθείας π.χ της $\varepsilon_1$ ( δίνω στο x μια τιμή και βρίσκω το y στην εξίσωση της $\varepsilon_1$).**
- **Υπολογίζω την απόσταση $\boldsymbol{d(A,\varepsilon_2)=d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$**

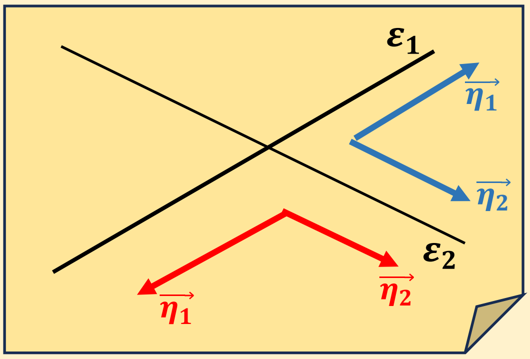
# Γωνία δύο ευθειών

## Θέλουμε να βρούμε τη γωνία που σχηματίζουν δύο γνωστές ευθείες

**Έχουμε τις ευθείες ($\varepsilon_1$):$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και ($\varepsilon_2$): $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$.**
**Θα βρούμε τις γωνίες που σχηματίζουν:**

- 🕮 **Βρίσκουμε διανύσματα $\overrightarrow{\eta_1} // \varepsilon_1$ και $\overrightarrow{\eta_2} // \varepsilon_2$ . Δύο τέτοια διανύσματα είναι τα $\overrightarrow{\eta_1} = (B_1, -A_1)$ και $\overrightarrow{\eta_2} = (B_2, -A_2)$.**
- 🕮 **Υπολογίζουμε το** $\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{\eta_1}, \overrightarrow{\eta_2}\right) = \dfrac{\overrightarrow{\eta_1} \cdot \overrightarrow{\eta_2}}{\left|\overrightarrow{\eta_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\eta_2}\right|}$
- 🕮 **Αν** $\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{\eta_1}, \overrightarrow{\eta_2}\right) > 0$ **, έχουμε βρει την ΟΞΕΙΑ γωνία.**

  **Αν** $\sigma\upsilon\nu\left(\overrightarrow{\eta_1}, \overrightarrow{\eta_2}\right) < 0$ **, έχουμε βρει την ΑΜΒΛΕΙΑ γωνία**





## Δευτεροβάθμιες εξισώσεις που παριστάνουν…δύο ευθείες

Παράδειγμα: $x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0$

Πως βρίσκουμε τις ευθείες

- **Μεταφέρουμε όλους τους όρους σε ένα μέλος.**
- **Παραγοντοποιούμε αυτό το μέλος.**
  **( συχνή χρήση των ταυτοτήτων:**

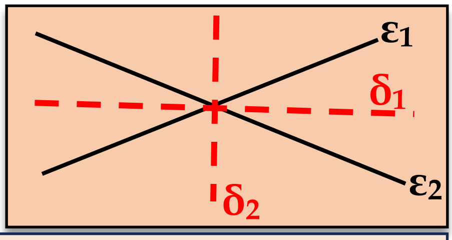
$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)\ )$$

*Β΄τρόπος*

Θεωρούμε την εξίσωση δυετεροβάθμια ως προς μία μεταβλητή π.χ ως προς x και τη λύνουμε με τους γνωστούς τύπους Δ = β²-4αγ   κλπ.

## Πως βρίσκουμε διχοτόμους γωνιών

**ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ:**
Δύο γνωστές ευθείες τέμνονται και ζητάμε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν




- **Παίρνουμε τυχαίο σημείο Μ(x,y) της διχοτόμου.**
- **Επειδή αυτό το σημείο ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας είναι: $\boldsymbol{d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)}$.**
- **Η παραπάνω σχέση μας δίνει τις εξισώσεις των δύο διχοτόμων.**

### Πως διακρίνουμε ποιες διχοτόμους έχουμε βρει

**Παίρνουμε τυχαίο σημείο Α πάνω σε μια ευθεία πχ στην $\varepsilon_1$ και βρίσκουμε τις $d(A,\delta_1)$ και $d(A,\delta_2)$**

**Αν $d(A,\delta_1)> d(A,\delta_2)$, τότε η $\delta_1$ είναι η διχοτόμος της ΑΜΒΛΕΙΑΣ γωνίας.**
**Αν $d(A,\delta_1)< d(A,\delta_2)$, τότε η $\delta_1$ είναι διχοτόμος της ΟΞΕΙΑΣ γωνίας**

## Εμβαδόν τριγώνου

Γνωρίζοντας τις τρεις κορυφές τριγώνου , μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν του. Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ:

- Βρίσκουμε δύο διανύσματα-πλευρές του τριγώνου με κοινή αρχή ,πχ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$
- Υπολογίζουμε την ορίζουσα τους $det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)$
- Το εμβαδόν του τριγώνου θα είναι $(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\right|}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

***<u>Εμβαδόν παραλληλογράμμου με τρεις γνωστές κορυφές</u>***

Βρίσκουμε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα γνωστά σημεία , οπότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου θα είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου.